GEOGEBRA
NA LEKCJACH

FORUM

Autor: Monika Jankowska

Nadzór merytoryczny: Patryk Cichoracki

Nadzór wydawniczy: Krzysztof Krzemień

Projekt okładki: KRASNA STUDIO Joanna Szczepaniak

DTP: TOGRAM Wojciech Niedzielski

ISBN 978-83-260-2668-3

Art. nr 331015

Wydawca:

Forum Media Polska Sp. z o.o.
ul. Polska 13, 60-595 Poznań
bok@forum-media.pl
tel. 801 88 44 22
fax 61 66 55 55 888

SPIS TREŚCI

NOTA AUTORSKA

Monika Jankowska – nauczycielka matematyki w gimnazjum, która z powodzeniem w swojej pracy zawodowej wykorzystuje program *GeoGebra*.

GeoGebra analitycznie

Myślę, że nikogo spośród czytelników nie trzeba przekonywać do tego, że program GeoGebra doskonale nadaje się do ilustrowania różnorodnych pojęć matematycznych. Szczególnie może okazać się on pomocny w geometrii analitycznej. W zależności od typu zadania, z jakim przychodzi nam się zmierzyć, możemy wykorzystać program do ilustrowania pojęć, poszukiwania odpowiedzi, weryfikowania hipotez, a także sprawdzania otrzymanych różnymi drogami wyników.

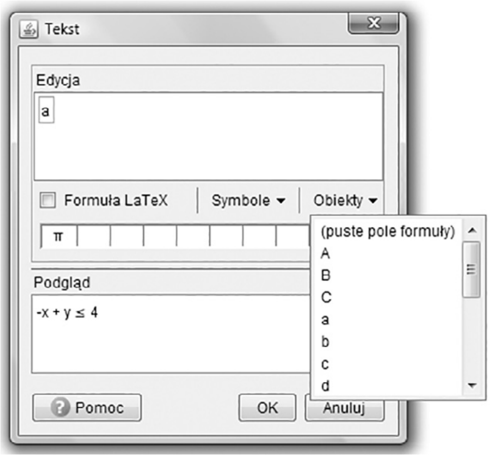
Przykładem aktywności ostatniego typu może być wykorzystanie GeoGebry podczas pracy z zadaniem:

Rozwiąż graficznie układ nierówności oraz znajdź współrzędne wierzchołków figury wyznaczonej przez układ:

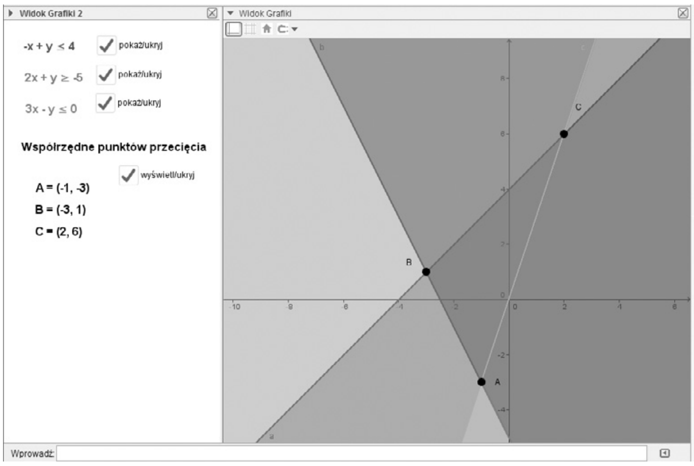
$$\begin{cases} -x + 4 \le 4 \\ 2x + y \ge -5 \\ 3x - y \le 0 \end{cases}$$

Aby uzyskać graficzną interpretację poszczególnych nierówności, wystarczy kolejno wpisać w **Polu wprowadzania** (ryc. 1) podane formuły (znak nierówności znajdziemy w tabeli symboli znajdującej się z prawej strony pola). Opcja ta jest dostępna jedynie w nowej wersji programu – co najmniej 4.0. Bardzo łatwo możemy również zaznaczyć punkty przecięcia prostych wyznaczających poszczególne części płaszczyzny. Współrzędne szukanych punktów pojawią się wraz z ich nazwami w widoku algebry. Takiego wykorzystania programu warto nauczyć naszych uczniów po to, aby potrafili oni samodzielnie kontrolować otrzymane wyniki. Może to okazać się szczególnie przydatne wówczas, gdy nie zostały one podane przez autorów podręczników i zbiorów zadań, co w przypadku zadań z geometrii jest dosyć częste. Poza tym, w większości przypadków podana jest jedynie końcowa odpowiedź. Szybkie wygenerowanie ilustracji w programie może więc oszczędzić wielu kłopotów oraz pomóc znaleźć odpowiedzi na pojawiające się pytania. Jeśli jednak chcemy zaprezentować uczniom wyłącznie końcową ilustrację do zadania, powinniśmy wcześniej odpowiednio przygotować plik. Po narysowaniu opisanych wyżej półpłaszczyzn, musimy zadbać oczywiście o sformatowanie obiektów na rysunku poprzez dobór kolorów oraz odpowiednich wielkości i grubości linii. Następnie proponuję uruchomienie **Widoku Grafiki 2**. W oknie, które nam się wówczas pojawi, możemy wyświetlić rozpatrywane nierówności oraz pola wyboru, które posłużą do pokazywania i ukrywania interesujących nas w danym momencie półpłaszczyzn. Nierówności w **Widoku Grafiki 2** uzyskamy poprzez użycie polecenia **Wstaw tekst**, a następnie wskazanie kolejno wybranych obiektów.

Podobnie możemy wyświetlić nazwy i współrzędne szukanych punktów przecięcia. Odpowiedź, której szukamy także nie powinna być widoczna od razu po uruchomieniu pliku (ryc. 2).

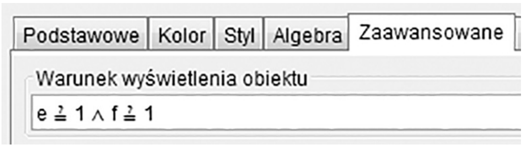


Ryc. 1.



Ryc. 2.

Dobrze byłoby również zadbać o to, aby odpowiednie punkty przecięcia pojawiały się dopiero wraz z półpłaszczyznami, których dotyczą. W tym celu we właściwościach każdego z punktów w zakładce **Zaawansowane** wystarczy określić warunek wyświetlenia obiektu poprzez wpisanie formuły: e = 1 ∧ f =1, która po zatwierdzeniu klawiszem **Enter** będzie wyglądała jak na ryc. 3.



Ryc. 3.

W podanym przykładzie e i f są nazwami przycisków, które warunkują pojawienie się dwóch z rozpatrywanych półpłaszczyzn. Przyjmują one wartość 1 lub 0 w zależności od tego, czy wybrany obiekt jest wyświetlany, czy też nie.

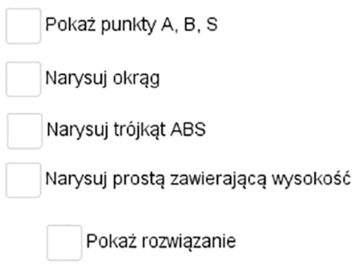
Przykład innego zadania, z którym możemy pracować w podobny sposób to:

> Punkty A = (2, 3) i B = (7, −2) leżą na okręgu o środku S = (0, −4). Napisz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta *ABS* poprowadzoną z wierzchołka *S*.

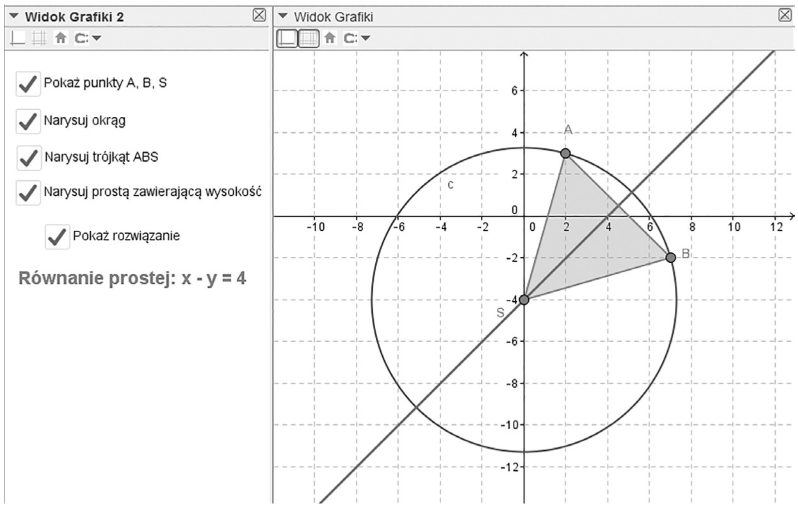
Aby szybko narysować w oknie programu *GeoGebra* punkty o konkretnie podanych współrzędnych, wystarczy wpisywać je kolejno w **Polu wprowadzania**, od razu nadając im nazwy, np. A = (2, 3). Ponieważ punkty te nie powinny być przemieszczane, możemy je unieruchomić poprzez zaznaczenie opcji **Osadź obiekt**, widocznej po wyświetleniu właściwości obiektu.

Po narysowaniu okręgu i trójkąta, a także prostej prostopadłej do odcinka *BC* możemy utworzyć odpowiednie Pola wyboru w **Widoku grafiki 2** (ryc. 4).

Widok Algebry nie będzie nam już potrzebny. Pracując z uczniami, możemy wyświetlać etapami kolejne kroki na drodze poszukiwania rozwiązania, a następnie sprawdzić jego poprawność. Możliwe jest także dorysowanie dodatkowych, pomocniczych obiektów – na przykład prostej *AB* oraz wyświetlenie jej równania (ryc. 5).



Ryc. 4.



Ryc. 5.

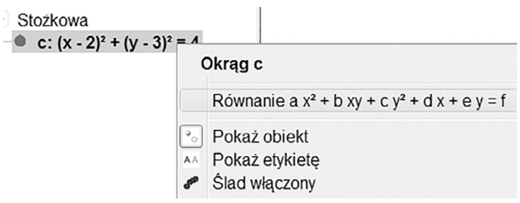
Ostatnim z opisywanych przykładów jest zadanie dotyczące okręgu i prostych stycznych.

Napisz równania prostych stycznych do okręgu $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ przechodzących przez punkt $K = (0, -1)$.

Rysowanie okręgów w *GeoGebrze* jest równie proste jak w przypadku pozostałych figur geometrycznych. Wystarczy wpisać w **Polu wprowadzania** formułę:

x^2 + y^2 − 4x − 6y + 9 = 0.

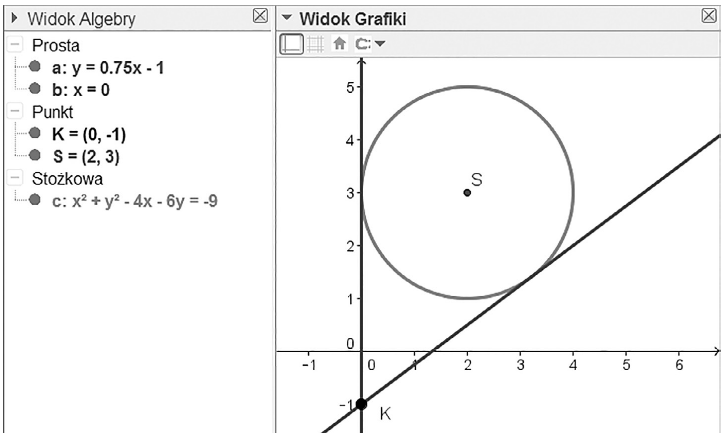
W **Widoku Algebry** pojawi się od razu równanie okręgu, ale będzie ono podane w innej postaci. Możemy jednak wykorzystać je do przypomnienia uczniom jak przekształcamy równania, a także, w jaki sposób możemy wyznaczyć środek okręgu. Łatwo możemy zmienić formę wyświetlania równania, klikając na nie prawym klawiszem myszy i wybierając interesującą nas postać równania (ryc. 6).



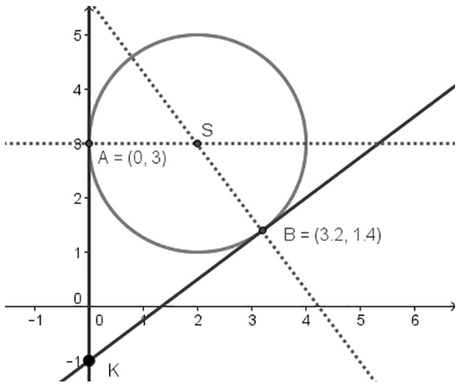
Ryc. 6.

Warto wcześniej zaznaczyć także punkt K dany w zadaniu oraz środek okręgu $S = (2, 3)$. Dzięki wbudowanemu w programie narzędziu styczne El możemy szybko narysować obydwie szukane proste oraz wyświetlić ich równania (ryc. 7).

Oczywiście możemy pozostawić tak przygotowaną ilustrację lub też wprowadzić przyciski – analogicznie jak w poprzednim zadaniu – aby krok po kroku pokazywać uczniom etapy poszukiwania rozwiązania. Wskazówką dla uczniów, która pomoże im znaleźć rozwiązanie zadania



Ryc. 7.



Ryc. 8.

w tradycyjny sposób, może być polecenie im znalezienia punktów stycznych konstrukcyjnie – wykreślając proste prostopadłe oraz wyznaczając punkty przecięcia (ryc. 8).

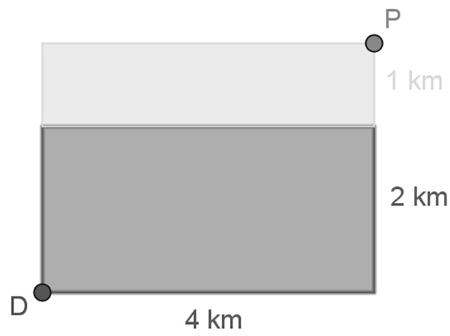
Mam nadzieję, że opisane zadania będą zachętą do tworzenia podobnych ilustracji do innych zadań geometrii analitycznej.

Optymalizacje z *GeoGebrą*

Czasami wystarczy mała dygresja albo odpowiednio dobrane lub zmodyfikowane zadanie, aby na chwilę przywołać miłe wspomnienia i zobaczyć uśmiechy na twarzach. Dlatego też postanowiłam przedstawić dziś zadanie tego typu. W połączeniu z użyciem *GeoGebry* rozwiązanie może być dobrym pomysłem na początek roku szkolnego. Może być w pełni wykorzystane w klasach licealnych, ponieważ będzie ono dotyczyło optymalizacji. Sama „zabawa" problemem, przewidywanie poprawnego wyniku i praca z *GeoGebrą* mogą dać cenne doświadczenia zarówno na lekcji, jak i na zajęciach dodatkowych lub na kole przedmiotowym.

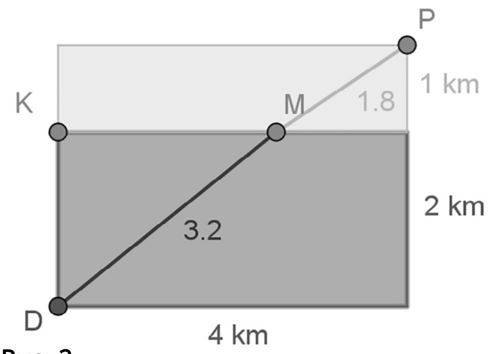
Zadanie, którym dzisiaj się zajmę, ma wiele wersji. Możemy je dopasować do własnych potrzeb, „opowiadając" swoją historię. Założyłam, że mamy pozostać w wakacyjnym klimacie, więc moja wersja zadania brzmi następująco:

Turysta chce przejść z domu wczasowego (punkt D) do punktu widokowego (punkt P). Obszar, po którym może się poruszać w linii prostej w dowolnym kierunku, to częściowo łąka, a częściowo plaża (jak na rysunku 1). Zakładamy, że średnia prędkość przemieszczania się po trawie wynosi 5 km/h, a po piachu 3 km/h. Jaką drogę powinien wybrać turysta, aby dostać się tam najszybciej?



Ryc. 1.

Aby przygotować funkcjonalny plik, możemy pracować początkowo na obszarze roboczym z wyświetloną siatką. Dzięki temu punkty wykorzystane do konstrukcji mogą być punktami kratowymi, które osadzimy, co uniemożliwi ich przemieszczanie. Potem możliwe będzie jednak poruszanie nimi, gdybyśmy chcieli zmienić warunki zadania albo rozważyć inne przypadki. Dlatego też polecam tworzenie zawsze jak najbardziej wszechstronnych i uniwersalnych plików. Po wybraniu punktów konstrukcyjnych zmieniamy odpowiednio ich nazwy oraz osadzamy wybrane obiekty (punkty *D, P, K*) – na przykład za pomocą przycisku  w menu **Widoku Grafiki,** a także ukrywamy niepotrzebne już proste i odcinki. Jeśli chcemy zapewnić sobie uniwersalność przygotowywanej ilustracji, musimy pamiętać, aby punkt wyznaczający granicę pomiędzy trawą i piachem (punkt *K*) był punktem leżącym na odcinku – boku prostokąta reprezentującym cały obszar. W celu zwizualizowania opisanej sytuacji wprowadzamy dodatkowo dwa osobne prostokąty i odpowiednio je kolorujemy. Będziemy potrzebować także punktu na granicy obszarów (punkt *M*) – i to również musi być punkt leżący na odcinku. Możemy wówczas wprowadzić odcinki reprezentujące drogę przejścia i wyświetlić w ich właściwościach wartości – długości odcinków (ryc. 2).



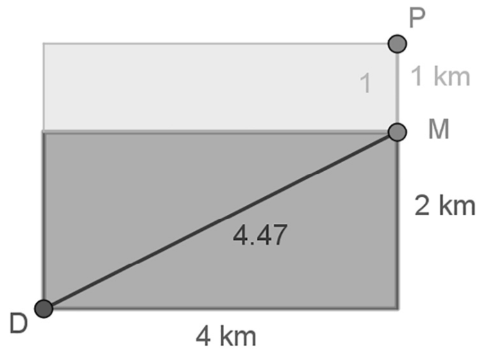
Ryc. 2.

	A	B	C	D	E
1					
2		prędkość	droga	czas	
3	TRAWA	5	2.36	0.47	
4	PIACH	3	2.92	0.97	
5		km/godz	km	godz	
6					
7					
8			Łączny czas:	1.45	godz
9					

Ryc. 3.

Po takim przygotowaniu pliku możemy przystąpić do pomiarów i obliczeń. Mogą być one wykonywane w obszarze roboczym zarówno **Widoku Grafiki**, jak i **Widoku Arkusza**, który możemy dodatkowo wyświetlić. Pozwoli to nam na szybkie wykonanie przejrzystej tabeli i ułatwi prowadzenie obserwacji. Aby przenieść wielkości mówiące o tym, jaki dystans turysta przeszedł po każdym terenie, wystarczy w wybranej komórce arkusza wpisać literowe oznaczenia odcinków, jakie im odpowiadają na rysunku. Jeśli chcemy wykonać obliczenia mówiące o czasie przejścia, możemy wykorzystać proste formuły, powszechnie znane z arkuszy kalkulacyjnych. Na przykład w komórce D3 wpisujemy: = *C3/B3*, a w komórce D8: = *D3* + *D4* (ryc. 3).

Po tak przygotowanym pliku pozostaje nam już tylko bezpośrednia praca nad poszukiwaniem rozwiązania. Oczywiście, w międzyczasie możemy dodatkowo zaproponować uczniom poszukiwanie odpowiedzi na kilka innych pytań. Warto bowiem zastanowić się na przykład, jak będzie wyglądał czas przejścia turysty idącego najkrótszą drogą (w linii prostej z punktu *D* do punktu *P* – 5 km). Taką drogę często wybieramy w praktyce, nie analizując zaistniałej sytuacji. Możemy też rozważyć inne przypadki szczególne, kiedy turysta będzie poruszał się tak, aby po trawie przejść tylko 2 km (pionowo do góry) i dowolnie po piachu oraz odwrotnie – dowolnie po trawie, a po piachu jedynie 1 km (ryc. 4). Każdy z nas może, oczywiście, dodać swoje pomysły na dodatkowe zagadnienia.



Ryc. 4.

Wracając jednak do problemu samej optymalizacji… Zadanie to może okazać się ciekawe nie tylko dla uczniów znających pojęcie pochodnej. Każdy uważny obserwator, zmieniając położenie punktu M, będzie w stanie dostrzec, że optymalna droga dla turysty to taka, która przez ok. 3,96 km prowadzi przez łąkę, a następnie przez ok. 1,16 km przez plażę. Żeby zwiększyć dokładność uzyskanego wyniku, możemy wyświetlić liczby z większą dokładnością – w **Menu głównym** programu w zakładce **Opcje** mamy możliwość wskazania liczby miejsc po przecinku, jaka zostanie wyświetlona (ryc. 5).